NOM : .... Prénom : ....

Exercice 1 : *(10 points)*

La partie B peut se traiter en utilisant les résultats donnés dans la partie A.

Partie A

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]0;20]$ par :

$$f(x) = \left(3e^2 - x\right)\ln(x) + 10.$$

1. (a) Déterminer la limite de f en 0.
   (b) Calculer la valeur exacte de $f\left(e^2\right)$, puis une valeur approchée à $0,01$ près.
2. f' désigne la dérivée de la fonction f.
   Montrer que, pour tout x de $]0;20]$, on a :
   $$f'(x) = -\ln(x) + \frac{3e^2}{x} - 1.$$
3. L'objectif de cette question est de déterminer le signe de la fonction f'.
   (a) Etudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0;20]$.
   (b) Calculer $f'(e^2)$ et en déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;20]$.
4. Etudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0;20]$.
5. **Etudier** le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;20]$ **puis dresser** son tableau de variations sur cet intervalle.
6. (a) Montrer que, sur l'intervalle $[0,6;0,7]$, l'équation $f(x) = 0$ posséde une unique solution notée α.
   A la calculatrice, donner une valeur approchée de α à $0,001$ près par excès.
   (b) Démontrer que $f(x)$ est négatif pour tout $x \in]0\ ;\ \alpha[$ et que $f(x)$ est positif pour tout $x \in]\alpha\ ;\ 20]$.

Partie B

Une entreprise produit et vend chaque semaine x milliers de DVD, x appartenant à $]0\ ;\ 20]$.
Le bénéfice réalisé est égal à $f(x)$ milliers d'euros où f est la fonction étudiée dans la partie 1.
En utilisant les résultats de la partie A :

1. déterminer le nombre minimal de DVD à fabriquer pour que l'entreprise réalise un bénéfice ;
2. déterminer le nombre de DVD à produire pour que l'entreprise rélise un bénéfice maximal ainsi que la valeur, à 10 euros près, de ce bénéfice maximal.

Exercice 2 : *(10 points)*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- les points A et B tels que :

$$A(0\ ;\ 1\ ;\ -1) \qquad \text{et} \qquad B(-2\ ;\ 2\ ;\ -1).$$

- la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique suivante :

$$\mathscr{D} : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & -1-t \end{array}\right. ,\ t \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. (a) Montrer que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles.
   (b) Montrer que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas sécantes.

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite $\mathscr{D}$ de coordonnées :

$$M(-2+u\ ;\ 1+u\ ;\ -1-u).$$

3. Vérifier que le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+y-z-3u=0$ est orthogonal à la droite $\mathscr{D}$ et passe par le point M.
4. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont sécants en un point N tel que :

$$N(-4+6u\ ;\ 3-3u\ ;\ -1).$$

5. (a) Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$.
   (b) Existe-t-il une valeur du nombre réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?
6. (a) Exprimer MN^2 en fonction de u.
   (b) En déduire la valeur du réel u pour laquelle la distance MN est minimale.