# Chapitre 13
# Applications du produit scalaire

## Sommaire



## Rappels

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

# I. Orthogonalité

***Définition 13.1 :*** ***Vecteurs orthogonaux***

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, et soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$.

...............................................................................................................

...............................................................................................................

...............................................................................................................

***Remarque 13.2 :***

La notion de perpendicularité ne s'applique qu'à des droites, alors que la notion d'orthogonalité s'applique à des plans, des vecteurs ou des droites.

Deux droites sont dites perpendiculaires lorsque elles sont sécantes et que l'angle formé en ce point d'intersection est un angle droit.

Deux droites sont dites orthogonales signifie qu'il existe une parallèle de l'une qui est perpendiculaire à la seconde.

Pour noter que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, on utilisera la même notation que pour les droites :

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}.$$

***Théorème 13.3 :***

On considère $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

...............................................................................................................

...............................................................................................................

...............................................................................................................

Autrement dit,

...............................................................................................................

***Remarque 13.4 :***

Par convention, le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est orthogonal à tout vecteur du plan.

***Propriété 13.5 :***

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ et on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On a :

..........................................................................................

***Exemple 13.6 :***

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, dans lequel on a trois points $A$, $B$ et $C$ vérifiant $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

# II. Equations des cercles et des droites

## 1. Vecteur normal

***Définition 13.7 :*** ***Vecteur normal***

On considère une droite $(d)$ admettant un vecteur directeur $\vec{u}$.

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

***Exemple 13.8 :***

On considère une droite $(d)$ d'équation cartésienne $2x - 3y + 5 = 0$.

Déterminer un vecteur directeur de la droite $(d)$.

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

***Exemple 13.8(suite) :***

Déterminer si les vecteurs $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux à la droite $(d)$.

........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................

## 2. Equations de droite

***Propriété 13.9 :***

On considère une droite $(d)$ passant par un point $A$ et ayant comme vecteur normal $\overrightarrow{n}$ ($\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$).

........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................

***Exemple 13.10 :***

On considère la droite $(d)$ passant par le point $A(-1;4)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ et soit $M(x;y)$ un point du plan.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le point $M$ appartienne à la droite $(d)$.

........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................
........................................................................................................................

***Théorème 13.11 :***

On considère $a$ et $b$ deux nombres réels non nuls tous les deux, c'est-à-dire $(a;b) \neq (0;0)$.

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

***Exemple 13.12 :***

On considère une droite $(d)$ admettant $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ comme vecteur normal et un point $A(3;2)$ de cette droite.

Déterminer une équation cartésienne de cette droite $(d)$.

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

## 3. Equation de cercle

***Propriété 13.13 :***

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $\Omega\,(x_0;y_0)$ et de rayon $R$.

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

***Exemple 13.14 :***

Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(-4;-6)$ passant par $A(2;-2)$.

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

***Propriété 13.15 :***

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$.

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

***Propriété 13.16 :***

L'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant $x^2+y^2+ax+by+c=0$ est soit un cercle, soit un point, soit l'ensemble vide.

***Exemple 13.17 :***

Déterminer géométriquement, à quoi correspondent ces trois ensembles suivants :

$\mathscr{E}_1$ d'équation $x^2+y^2-4x+6y+13=0$ ;

$\mathscr{E}_2$ d'équation $x^2+y^2+2x-4y+9=0$ ;

$\mathscr{E}_3$ d'équation $x^2+y^2+10x+2y+17=0$.

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

***Exemple 13.17(suite) :***

# III. Les applications au triangle

Dans cette partie, on s'intéresse à la résolution des triangles, c'est-à-dire à la détermination des éléments qui caractérisent un triangle : les longueurs des côtés et les angles.

## 1. Relations métriques dans le triangle

***Théorème 13.18 : Théorème de la Médiane***

On considère $A$ et $B$ deux points du plan et $I$ le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point $M$ du plan, on a :

1. $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$.
2. $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.
3. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$.

***Exemple 13.19 :***

On considère un triangle $ABM$ avec $AM = 5$, $MB = 6$, $I$ milieu de $[AB]$ et soit $\theta$ l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ tel que $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$.
Déterminer les longueurs $AB$ et $IM$.

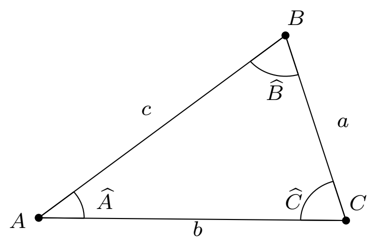
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................
............................................................................................................................................................

## 2. Al-Kashi

Dans la suite du chapitre, on se donne les écritures suivantes :
Dans un triangle ABC, on note :

$$a = BC \qquad b = AC \qquad c = AB$$

$$\widehat{A} = \widehat{BAC} \quad \widehat{B} = \widehat{ABC} \quad \widehat{C} = \widehat{ACB}$$



**Propriété 13.20 : Formule d'Al-Kashi / Lois des cosinus**

Pour tout triangle ABC, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}.$$

**Remarque 13.21 :**

Ces formules généralisent la formule du « Théorème de Pythagore » qui s'applique uniquement dans le cas d'un triangle rectangle.

Al-Kashi (1380-1429) était un astronome et mathématicien perse notamment connu pour ses approximations du nombre $\pi$ à la seizième décimale (il a battu un précédent record détenu par Archimède avec ses trois décimales).

**Exemple 13.22 :**

On considère un triangle $ABC$ avec $a = 5$, $b = 3$ et $\cos\widehat{C} = 30\,^\circ$.

Calculer la longueur manquante $c$ de ce triangle.

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

**Propriété 13.23 : Formule des Aires**

Pour tout triangle $ABC$ non aplati, l'aire du triangle $ABC$, notée $\mathscr{A}_{ABC}$, est donnée par :

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}.$$

**Exemple 13.24 :**

On considère un triangle $ABC$ avec $a = 7$, $b = 10$ et $\widehat{C} = 60\,^\circ$.

Déterminer l'aire du triangle $ABC$.

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

***Propriété 13.25 :*** ***Formule des sinus***

Pour tout triangle $ABC$ non aplati, on a :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}.$$

Cette propriété est une conséquence de la « **formule des aires** ».

***Exemple 13.26 :***

On considère un triangle $ABC$ tel que $\widehat{A} = 60\,^{\circ}$, $\widehat{B} = 45\,^{\circ}$ et $a = 5$.

Déterminer la longueur $b$ du triangle $ABC$.

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................