Exercice 1 : *(4 points)*

1. La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 50$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

(a) $u_n = 50 \times (-2)^n$ (b) $u_n = 50 + \dfrac{-2}{n}$ (c) $\boxed{u_n = 50 - 2n}$ (d) $u_n = 50 \times 2^n$

/1 point

2. Si (v_n) est une suite arithmétique de raison 4 vérifiant $v_0 = 5$, alors on a $v_0 + v_1 + ... + v_{10} = ...$:

(a) 250 (b) $\boxed{275}$ (c) 6 990 505 (d) 1 747 625

/1 point

3. Si (w_n) est une suite géométrique de raison 4, vérifiant $w_0 = 5$, alors on a $w_0 + w_1 + ... + w_{10} = ...$:

(a) 250 (b) 275 (c) $\boxed{6\,990\,505}$ (d) 1 747 625

/1 point

4. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4x^2 + 1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(u \circ u)(x) = ...$:

(a) $4x^4 + 1$ (b) $16x^4 + 5$ (c) $64x^4 + 5$ (d) $\boxed{64x^4 + 32x^2 + 5}$

/1 point

Exercice 2 : *(6 points)*

1.(a) La fonction f est de la forme $u \times v$ avec

$$u(x) = \sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad v(x) = 3x^2 + 5.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = 6x.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\,v(x) + v'(x)\,u(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (3x^2 + 5) + 6x \times \sqrt{x} \\ &= \frac{3x^2 + 5 + 2\sqrt{x} \times 6x \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x^2 + 5 + 12x^2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{15x^2 + 5}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

/1 point

(b) On a :

$$f(1) = 8 \qquad \text{et} \qquad f'(1) = \frac{20}{2} = 10.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} & y = f'(1)(x - 1) + f(1) \\ \iff & y = 10(x - 1) + 8 \\ \iff & y = 10x - 2. \end{aligned}$$

L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1 est $y = 10x - 2$. */1 point*

2.(a) La fonction g est de la forme $v \circ u$.

$$g \ : \ \begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^2+7x+5 & \longmapsto & e^{3x^2+7x+5} \end{array}$$

Ainsi, u est définie par $u(x) = 3x^2 + 7x + 5$ et v est définie par $v(x) = e^x$. */1 point*

(b) La fonction g est de la forme $v \circ u$ avec $u(x) = 3x^2 + 7x + 5$ et $v(x) = e^x$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$u'(x) = 6x + 7 \qquad \text{et} \qquad v'(x) = e^x$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x) \times v'(u(x)) \\ &= (6x+7)\, e^{3x^2+7x+5}. \end{aligned}$$

/1 point

3. La fonction h est de la forme $v \circ u$ avec $u(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x^3}$ et $v(x) = x^3$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a :

$$u'(x) = 6x - \frac{3}{x^4} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = 3x^2.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x) \times v'(u(x)) \\ &= \left(6x - \frac{3}{x^4}\right) \times 3 \times \left(3x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^2. \end{aligned}$$

/2 points

Exercice 3 : *(6 points)*

1.(a)

i	X	1	2	3	4	5
u	5700	5486	5268	5047	4823	4595

/1 point

(b) A la fin de l'exécution de cet algorithme, il affiche 4595. */0,5 point*

2. On considère la propriété définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

- **Initialisation :** pour $n = 0$, on a :

$$u_0 = 5\,700 \qquad \text{et} \qquad u_1 = 1{,}015\, u_0 - 300 = 5\,486.$$

Ainsi, on a $u_1 \leq u_0$.
La propriété est donc vraie au rang $n = 0$. */0,5 point*

2. *(Suite...)*
   - **<u>Hérédité :</u>** soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_{n+1} \leq u_n$.
     On démontre que $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.
     On a :
     $$\begin{aligned} u_{n+1} \leq u_n &\iff 1,015\, u_{n+1} \leq 1,015\, u_n \\ &\iff 1,015\, u_{n+1} - 300 \leq 1,015\, u_n - 300 \\ &\iff u_{n+2} \leq u_{n+1}. \end{aligned}$$
     La propriété est donc héréditaire. ***/1 point***
   - **<u>Conclusion :</u>** la propriété est vraie au rang $n = 1$ et elle est héréditaire à partir de ce rang donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
     $$u_{n+1} \leq u_n.$$
     La suite (u_n) est alors décroissante. ***/0,5 point***
3. On considère la propriété définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :
   $$u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n.$$
   - **<u>Initialisation :</u>** pour $n = 0$, on a :
     $$u_0 = 5\,700 \qquad \text{et} \qquad 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^0 = 5\,700.$$
     Ainsi, on a $u_0 = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^0$..
     La propriété est donc vraie au rang $n = 0$. ***/0,5 point***
   - **<u>Hérédité :</u>** soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n$.
     On démontre que $u_{n+1} = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^{n+1}$.
     On a :
     $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1,015\, u_n - 300 \\ &= 1,015\,(20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n) - 300 \\ &= 20\,300 - 14\,300 \times 1,015^{n+1} - 300 \\ &= 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^{n+1}. \end{aligned}$$
     La propriété est donc héréditaire. ***/1 point***
   - **<u>Conclusion :</u>** la propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire à partir de ce rang donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
     $$u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n.$$
     /0,5 point

Exercice 4 : ***(7 points)***

1. La fonction C_T est dérivable sur l'intervalle $[1\ ;\ 20]$, comme sommes et composées de fonctions dérivables sur ce même intervalle, et, pour tout $q \in [1\ ;\ 20]$, on a :
   $$\begin{aligned} C_T'(q) &= 4 - 2q\, e^{-0,2q} - q^2 \times (-0,2)\, e^{-0,2q} \\ &= 4 + \left(0,2q^2 - 2q\right)\, e^{-0,2q} \\ &= C_m(q). \end{aligned}$$
   /1,5 point

2.(a) Pour tout $q \in [1\ ;\ 20]$, on a :

$$\begin{aligned} C_M(q) &= \frac{C_T(q)}{q} \\ &= \frac{4q - q^2\, e^{-0,2q}}{q} \\ &= 4 - q\, e^{-0,2q}. \end{aligned}$$

/1,5 point

(b) La fonction C_M est dérivable sur $[1\ ;\ 20]$ comme somme et composée de fonction dérivable sur ce même intervalle.
De plus, pour tout $q \in [1\ ;\ 20]$, on a :

$$\begin{aligned} C'_M(q) &= -e^{-0,2q} - q \times (-0,2)e^{-0,2q} \\ &= e^{-0,2q}(0,2q - 1). \end{aligned}$$

/1,5 point

(c) Comme pour tout $q \in [1\ ;\ 20]$, on a $e^{-0,2q} > 0$, le signe de $C'_M(q)$ est celui de $0,2q - 1$.
Or, on a :

$$\begin{aligned} 0,2q - 1 < 0 &\iff 0,2q < 1 \\ &\iff q < 5. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction C_M est strictement décroissante sur $[1\ ;\ 5]$.
De plus, on a :

$$\begin{aligned} 0,2q - 1 > 0 &\iff 0,2q > 1 \\ &\iff q > 5. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction C_M est strictement croissante sur $[5\ ;\ 20]$.
La fonction C_M a donc un minimum pour $q_0 = 5$ et on a :

$$\begin{aligned} C_M(5) &= 4 - 5e^{-0,2\times 5} \\ &= 4 - 5e^{-1} \\ &\approx 2,1606. \end{aligned}$$

Finalement, le coût marginal de 5 tonnes produites est d'environ 2 161 €. */1,5 point*

3. Pour tout $q \in [1\ ;\ 20]$, on a :

$$R(q) = 4q.$$

Ainsi, pour tout $q \in [1\ ;\ 20]$, on a :

$$\begin{aligned} B(q) &= R(q) - C_T(q) \\ &= 4q - \left(4q - q^2 e^{-0,2q}\right) \\ &= 4q - 4q + q^2 e^{-0,2q} \\ &= q^2 e^{-0,2q}. \end{aligned}$$

Etudions les variations de la fonction B sur $[1\ ;\ 20]$ pour en déduire son maximum.
La fonction B est de la forme $u \times v$ où $u(x) = q^2$ et $v(x) = e^{-0,2q}$.
Elle est donc dérivable sur $[1\ ;\ 20]$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $[1\ ;\ 20]$.

3. *(Suite...)*
   Ainsi, pour tout $q \in [1\ ;\ 20]$, on a :

$$\begin{aligned} B'(q) &= 2q \times e^{-0,2q} + q^2 \times \left(-0,2e^{-0,2q}\right) \\ &= q\, e^{-0,2q}\,(2 - 0,2q)\,. \end{aligned}$$

   Or, pour tout $q \in [1\ ;\ 20]$, on a :

$$q^2 > 0 \qquad \text{et} \qquad e^{-0,2q} > 0.$$

   Le signe de B' ne dépend donc que du signe de $2 - 0,2q$.
   Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} B'(q) > 0 &\iff 2 - 0,2q > 0 \\ &\iff 2 > 0,2q \\ &\iff 10 > q. \end{aligned}$$

   Ainsi, la fonction B est strictement croissante sur $[1\ ;\ 10]$.
   De plus, on a :

$$\begin{aligned} B'(q) < 0 &\iff 2 - 0,2q < 0 \\ &\iff 2 < 0,2q \\ &\iff 10 < q. \end{aligned}$$

   Ainsi, la fonction B est strictement décroissante sur $[10\ ;\ 20]$.
   La fonction B admet donc un minimum en $x_0 = 10$ et on a :

$$\begin{aligned} B(10) &= 10^2\, e^{-0,2\times 100} \\ &= 100\, e^{-2} \\ &\approx 13,534. \end{aligned}$$

   Finalement, le bénéfice maximal de cette entreprise est d'environ 13 534 €. ***/1 point***