Chapitre 12
Convexité

Sommaire

I. Fonction convexe / Fonction concave

1. Définitions

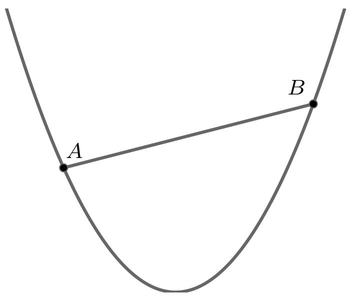
Définition 12.1 : ***d'une fonction convexe/concave***

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- Si pour tous points A et B appartenant à $\mathscr{C}_f$, le segment $[AB]$ est situé au-dessus de $\mathscr{C}_f$, on dit que la fonction f est une *fonction convexe* sur I.
- Si pour tous points A et B appartenant à $\mathscr{C}_f$, le segment $[AB]$ est situé en-dessous de $\mathscr{C}_f$, on dit que la fonction f est une *fonction concave* sur I.

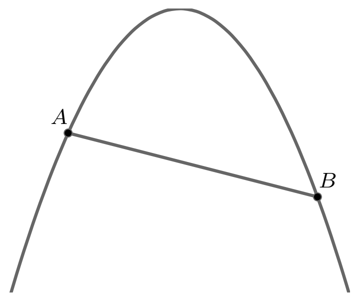
Remarque 12.2 :

Les deux représentations suivantes illustrent la convexité d'une fonction.



Tout segment $[AB]$ se situe au dessus de la courbe représentative de la fonction f :

f est donc convexe.



Tout segment $[AB]$ se situe au dessus de la courbe représentative de la fonction f :

f est donc concave.

2. Cas des fonctions dérivables

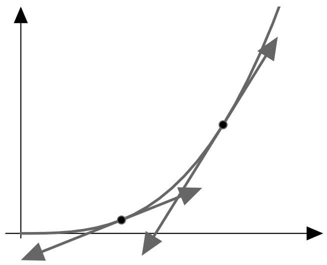
Propriété 12.3 :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe sur I si et seulement si sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes.
- La fonction f est concave sur I si et seulement si sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de chacune de ses tangentes.

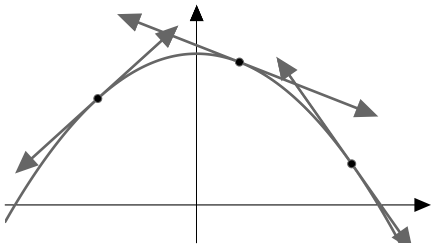
Remarque 12.4 :

Les graphiques suivants illustrent la propriété précédente :



Les tangentes sont en-dessous de la courbe représentative de la fonction f :

f est convexe.



Les tangentes sont au-dessus de la courbe représentative de la fonction f :

f est concave.

Exemple 12.5 :

1. Représenter la fonction inverse.
2. Conjecturer, à l'aide du graphique précédent, la convexité de la fonction inverse.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 17 à 19 page 131 (on ne traitera pas la question des points d'inflexion).

Théorème 12.6 :

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
On a alors :

- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

3. Cas des fonctions deux fois dérivables

Définition 12.7 : ***de la dérivée seconde***

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I telle que f' soit aussi dérivable sur I.
La dérivée de f' est appelée *dérivée seconde* de f et est notée f''.
On dit alors que f est deux fois dérivable sur I.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 16 page 131.

Théorème 12.8 :

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.
On a alors :

- f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.

Démonstration 12.9 :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.

- On a alors :
$$\begin{aligned} f \text{ convexe sur } I &\iff f' \text{ croissante sur } I \\ &\iff f'' \text{ positive sur } I. \end{aligned}$$
- On a alors :
$$\begin{aligned} f \text{ concave sur } I &\iff f' \text{ décroissante sur } I \\ &\iff f'' \text{ négative sur } I. \end{aligned}$$

□

Exemple 12.10 :

Etudier la convexité de la fonction inverse.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 24 page 131.

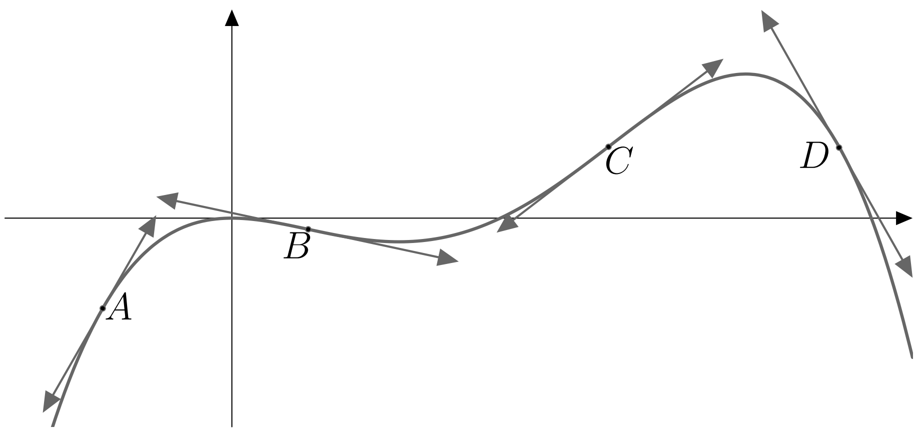
II. Points d'inflexion

Définition 12.11 : ***d'un point d'inflexion***

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
On appelle *point d'inflexion* tout point M de $\mathscr{C}_f$ où la tangente à $\mathscr{C}_f$ en M traverse la courbe.

Remarque 12.12 :

On donne la représentation graphique de la fonction f.
On a placé 4 points A, B, C et D sur $\mathscr{C}_f$ et on a tracé chacune des tangentes.



Les points B et C sont des points d'inflexion car les tangentes en ces points traversent $\mathscr{C}_f$ alors que les points A et D non.

Propriété 12.13 :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
$M(x_M; y_M)$ un point d'inflexion si et seulement si la convexité de f change en x_M.

✎ ***Exercice(s) :***

En reprenant les exercices 17 à 19. page 131, traiter la question des points d'inflexion.

Propriété 12.14 :

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Le point $M(x_M; y_M)$ est un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annule et change de signe en x_M.

Exemple 12.15 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3.$$

Etudier la convexité de la fonction f et préciser ses éventuels points d'inflexion.

Exemple 12.16 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^4 + 12x^3 - 30x^2 + 10.$$

Déterminer les points d'inflexion (éventuels) de la fonction f.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 22, 23 et 26 page 131.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 87 page 136.