

Question de Cours :

Propriété 3.30 : Soient $z_1 \in \mathbb{U}$ et $z_2 \in \mathbb{U}$. Alors :

$$\frac{1}{z_1} \in \mathbb{U} \quad z_1 z_2 \in \mathbb{U} \quad \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{U}$$

Exercice 1 :

1. Calculer le $\text{pgcd}(637; 595)$ à partir de la liste des diviseurs de 637 et 595.
2. Trouver un couple $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ solution l'équation $637x + 595y = 7$.

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\text{pgcd}(5n + 3; 2n - 1)$ divise 11 et divise $n + 5$.
2. Dans le cas où $\text{pgcd}(5n + 3; 2n - 1) = 11$ quel est le reste de la division euclidienne de n par 11 ?

Exercice 3 :

Soient $A(3 - 2i)$, $B(i - 1)$, $C(-1 - 2i)$ et $D(1 - 0, 5i)$ quatre points du plan complexe.

1. Calculer les longueurs AD , BD et CD .
2. Que représente le point D par rapport au triangle ABC ?

Question de Cours :

Propriété 3.25 : Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|z^n| = |z|^n.$$

Exercice 1 :

1. Trouver $\text{pgcd}(87; 31)$ à partir de la liste des diviseurs de 87 et 31.
2. Trouver un couple $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ solution l'équation $87x + 31y = 1$.

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer, de deux manières différentes, que $14n+3$ et $5n+1$ sont premiers entre eux.

Exercice 3 :

Déterminer puis représenter graphiquement l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant :

1. $|iz - 2i| = 1$

2. $|\bar{z} - 1 + i| = |\bar{z} - 5 + i|$

Question de Cours :

Lemme d'EUCLIDE (Propriété 4.7) : Soient a et b deux entiers tels que $a = bq + r$ où $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ et $0 \leq r < b$.

Alors, on a :

$$\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r)$$

De plus, on a :

$$\text{pgcd}(a; b) = \text{pgcd}(r; b)$$

Exercice 1 :

1. Calculer le $\text{pgcd}(23; 40)$ à partir de la liste des diviseurs de 23 et 40.
2. Trouver un couple solution $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $23x + 40y = 1$.

Exercice 2 :

Soient $A(4 + i)$, $B(1 + 3i)$ et $C(4 - \frac{4}{5}i)$ trois points du plan complexe.

1. Calculer la longueur AB .
2. Le point C appartient-il au cercle de centre A passant par B ?

Exercice 3 :

Déterminer puis représenter graphiquement l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant :

$$1. \left| \bar{z} - 2 + \frac{3}{4}i \right| = 3$$

$$2. |3iz| = |3iz + 3 - 9i|$$

Question de Cours :

Théorème de GAUSS (Propriété 4. 24) : Soient a , b et c trois entiers relatifs non nuls.

Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux alors a divise c .

Exercice 1 :

1. Calculer $\text{pgcd}(38; 45)$ à partir de la liste des diviseurs de 38 et 45.
2. Déterminer un couple $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ solution l'équation $38x + 45y = 1$.

Exercice 2 :

1. Déterminer la forme algébrique des nombres suivants :

$$(a) |z_1| = 2 \text{ et } \arg(z_1) = -\frac{\pi}{4} \quad (b) |z_2| = 5 \text{ et } \arg(z_2) = -\frac{3\pi}{4}$$

2. Déterminer une forme trigonométrique du nombre $z_3 = 6 + 6\sqrt{3}i$.

Exercice 3 :

Démontrer que $z \in \mathbb{U}$ si et seulement si $\bar{z} = \frac{1}{z}$