Exercice 1 : *(8 points)*

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f'(x) = 8x^7 - 5x^4$$
/1 point

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$g'(x) = -4 \times 5x^4 + 3 \times 3x^2 = -20x^4 + 9x^2$$
/1 point

3. La fonction h est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = -2x + 1$ et $v(x) = -3x^4 + x^2$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produite de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) = -2$ et $v'(x) = -12x^3 + 2x$
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} h'(x) &= -2 \times (-3x^4 + x^2) + (-12x^3 + 2x)(-2x + 1) \\ &= 6x^4 - 2x^2 + 24x^4 - 12x^3 - 4x^2 + 2x \\ &= 30x^4 - 12x^3 - 6x^2 + 2x. \end{aligned}$$
/2 points

4. La fonction i est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 12x + 3x^2$ et $v(x) = x^3 - 3$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{3}\}$ comme quotient de deux fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) = 12 + 6x$ et $v'(x) = 3x^2$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{3}\}$, on a :
$$\begin{aligned} i'(x) &= \frac{(12 + 6x)(x^3 - 3) - 3x^2(12x + 3x^2)}{(x^3 - 3)^2} \\ &= \frac{12x^3 - 36 + 6x^4 - 18x - 36x^3 - 9x^4}{(x^3 - 3)^2} \\ &= \frac{-3x^4 - 24x^3 - 18x - 36}{(x^3 - 3)^2} \end{aligned}$$
/2 points

5. La fonction j est de la forme $x \longmapsto u(ax + b)$ où u est la fonction racine carrée ($u(x) = \sqrt{x}$) et $ax + b = -2x + 3$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$, on a $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$, on a :
$$\begin{aligned} j'(x) &= a \times u'(ax + b) \\ &= -2 \times \frac{1}{2\sqrt{-2x + 3}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{-2x + 3}}. \end{aligned}$$
/2 points

Exercice 2 : *(3 points)*

1. La fonction f est de la forme $u \times v$ avec

$$u(x) = \sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad v(x) = 3x^2 + 5.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = 6x.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\,v(x) + v'(x)\,u(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (3x^2 + 5) + 6x \times \sqrt{x} \\ &= \frac{3x^2 + 5 + 2\sqrt{x} \times 6x \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x^2 + 5 + 12x^2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{15x^2 + 5}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

/2 points

2. On a :

$$f(1) = 8 \qquad \text{et} \qquad f'(1) = \frac{20}{2} = 10.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} & y = f'(1)(x-1) + f(1) \\ \iff & y = 10(x-1) + 8 \\ \iff & y = 10x - 2. \end{aligned}$$

L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1 est $y = 10x - 2$. */1 point*

Exercice 3 : *(4 points)*

1. Soient $A(-3; 2)$, $B(-2; -2)$, $D(1; 3)$. Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} =$...

☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ■ 0

2. Dans un triangle ABC, on a $AB = 7$, $BC = 5$ et $AC = 10$. On a alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$...

☐ 6 ☐ 12 ☐ 124 ■ 62

3. Si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 7$ et $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = -5$ alors $(\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{v} =$...

☐ 0 ☐ -3 ☐ 2 ■ 17

4. Si $\overrightarrow{u}^2 = 12$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 7$ et $\overrightarrow{v}^2 = 25$ alors $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = ...$

☐ 44 ☐ -13 ■ 23 ☐ 30

Exercice 4 : ***(5 points)***

1.(a) Dans le triangle ADE rectangle en D, on a :

$$\cos\left(\widehat{EAD}\right) = \frac{AD}{AE} \iff \cos(30) = \frac{AD}{4} \iff \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AD}{4} \iff AD = 2\sqrt{3}.$$

On a alors $x_D = x_E = 2\sqrt{3}$. ***/0,5 point***

Dans ce même triangle, on a :

$$\sin\left(\widehat{EAD}\right) = \frac{ED}{AE} \iff \sin(30) = \frac{ED}{4} \iff \frac{1}{2} = \frac{ED}{4} \iff ED = 2.$$

On a alors $y_E = 2$. ***/0,5 point***

Finalement, dans ce repère, on a $E\left(2\sqrt{3}; 2\right)$.

(b) Dans ce repère, on a :

$$A(0;0) \qquad D(2\sqrt{3};0) \qquad E\left(2\sqrt{3};2\right)$$

/0,5 point

De plus, le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle en B car $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 45\,^\circ$ et donc $AB = BC$.
Ainsi, d'après Pythagore, on a :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \iff 2AB^2 = 2^2 \iff AB^2 = 2 \iff AB = \sqrt{2}.$$

Finalement, on a :

$$B(\sqrt{2};0) \qquad C(\sqrt{2};-\sqrt{2}).$$

/1 point

2.(a) On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$$

Ainsi, on a :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \sqrt{2}\times 2\sqrt{3} + 0\times 0 = 2\sqrt{6}.$$

/0,5 point

(b) On a :

$$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\2\end{pmatrix}$$

Ainsi, on a :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = \sqrt{2}\times 2\sqrt{3} + 0\times 2 = 2\sqrt{6}.$$

/0,5 point

3. On a :

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Ainsi, on a :

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \sqrt{2}\times 2\sqrt{3} + 0\times 2 = 2\sqrt{6}.$$

/0,5 point

Exercice 5 : ***(3,5 points)***

1. On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

Or $AB = AE + EB = 5 + 3 = 8$. ***/0,25 point***

De plus, le triangle BEC est rectangle en E, donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} BC^2 &= EC^2 + EB^2 \\ &= 4^2 + 3^2 \\ &= 25 \end{aligned}$$

/0,5 point

De plus, le triangle AEC est rectangle en E, donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} AC^2 &= EC^2 + EA^2 \\ &= 5^2 + 4^2 \\ &= 41 \end{aligned}$$

/0,5 point

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(8^2 + 41 - 25\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 80 \\ &= 40 \end{aligned}$$

/0,75 point

2. Le triangle ABD est rectangle en A, donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 \\ &= 8^2 + 4^2 \\ &= 80 \end{aligned}$$

/0,5 point

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = BC \times BD \times \cos\left(\widehat{CBD}\right) &\iff 40 = 5 \times \sqrt{80} \times \cos\left(\widehat{CBD}\right) \\ &\iff \cos\left(\widehat{CBD}\right) = \frac{40}{5\sqrt{80}} \\ &\iff \widehat{CBD} = \cos^{-1}\left(\frac{40}{5\sqrt{80}}\right) \end{aligned}$$

Donc $\widehat{CBD} \approx 26,6\,^\circ$. ***/1 point***