Exercice 1 : *(11 points)*

— Partie A —

1.(a) On a :

$$\lim_{x\to+\infty}(x-3)=+\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}=+\infty.$$

Ainsi, par produit de limites, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}(x-3)e^{x}=+\infty.$$

Finalement, par somme, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

/1 point

(b) La fonction f est la somme d'une fonction constante et d'un produit d'une fonction affine ($x\longmapsto x-3$) avec la fonction exponentielle, qui sont toutes dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\times e^{x}+(x-3)\times e^{x}\\ &= e^{x}\left(1+x-3\right)\\ &= (x-2)\,e^{x}. \end{aligned}$$

/1 point

(c) Comme, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $e^{x}>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x-2$.
Ainsi, on a :

- si $0\leqslant x<2$, on a $x-2<0$ et donc $f'(x)<0$. Ainsi, la fonction est décroissante sur $[0;2]$.
- si $x>2$, on a $x-2>0$ et donc $f'(x)>0$. Ainsi, la fonction est croissante sur $[2;+\infty[$.

De plus, on a :

$$\begin{aligned} f(0)&=10+(0-3)\,e^{0}\\ &=7. \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} f(2)&=10+(2-3)\,e^{2}\\ &=10-e^{2}. \end{aligned}$$

On dresse le tableau de variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$:

x	0		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	7	$\searrow$	$10-e^{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

/1,5 point

(d) D'après la question précédente, le minimum de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$ est $10-e^{2}$ atteint en $x=2$. Ainsi, pour tout $x\in[0;+\infty[$, on a :

$$f(x)\geqslant 10-e^{2}\approx 2,61.$$

Finalement, la fonction f est strictement positive sur $[0;+\infty[$. */0,5 point*

2.(a) La fonction G est le produit d'une fonction affine et de la fonction exponentielle, qui sont toutes deux dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$: G est donc dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
De plus, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} G'(x) &= 1 \times e^x + (x-4)\,e^x \\ &= e^x\,(1+x-4) \\ &= (x-3)e^x \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Finalement, G est une primitive de g sur $[0\ ;\ +\infty[$. ***/1 point***

(b) Comme, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, on a $f(x) = 10 + g(x)$, une primitive de f est la fonction F définie par :

$$F(x) = 10x + G(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$F(x) = 10x + (x-4)e^x.$$

/0,5 point

(c) La fonction F est la somme d'une fonction linéaire et de la fonction F, qui sont toutes deux dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$: la fonction F est donc dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
De plus, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 10 + g(x) \\ &= f(x) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Finalement, la fonction F est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. ***/0,5 point***

— Partie B —

1. D'après la question 2) c) de la partie 1, la fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = 10x + (x-4)\,e^x$ est une primitive de la fonction f.
Ainsi, les primitives de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$ sont les fonctions F_c définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F_c(x) = 10x + (x-4)\,e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

/0,5 point

Les coûts fixes s'élevant à 20 000 euros, il vient que $C(0) = 20$.
On est donc ramené à déterminer c tel que $F_c(0) = 20$.
On a alors :

$$\begin{aligned} F_c(0) = 20 &\iff 10 \times 0 + (0-4)\,e^0 + c = 20 \\ &\iff -4 + c = 20 \\ &\iff c = 24. \end{aligned}$$

Finalement, la fonction C est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $C(x) = 10x + (x-4)\,e^x + 24$. ***/1 point***

2.(a) On est ramené à démontrer que l'équation $f(x) = 11,292$ admet une solution sur $[0~;~4]$.
Or, d'après le tableau de variations de la fonction f donné en question 1)c) de la partie 1, pour tout $x \in [0;2]$, on a :

$$7 \geqslant f(x).$$

Ainsi, sur l'intervalle $[0;2]$, l'équation $f(x) = 11,292$ n'admet pas de solution.
De plus, on a :

- f continue sur $[2~;~4]$;
- f strictement croissante sur $[2;4]$;
- $f(2) = 10 - e^2 \approx 2,61$ et $f(4) = 10 + e^4 \approx 64,6$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 11,292$ admet une unique solution sur $[2;4]$.
Finalement, sur $[0;4]$, l'équation $f(x) = 11,292$ admet une unique solution α. ***/2 points***

(b) En utilisant la calculatrice, et la méthode par balayage, on a :

- En prenant un pas de 1, on a :

x	$f(x)$
3	10
4	64,598

Ainsi, on a :

$$3 < \alpha < 4.$$

- En resserrant l'intervalle d'étude à $[3;4]$ et en prenant un pas de 0,1, on a :

x	$f(x)$
3	10
3,1	12,22

Ainsi, on a :

$$3 < \alpha < 3,1.$$

- En resserrant l'intervalle d'étude à $[3;3,1]$ et en prenant un pas de 0,01, on a :

x	$f(x)$
3,06	11,28
3,07	11,508

Ainsi, on a :

$$3,06 < \alpha < 3,07.$$

- En resserrant l'intervalle d'étude à $[3,06;3,07]$ et en prenant un pas de 0,001, on a :

x	$f(x)$
3,06	11,28
3,061	11,302

Ainsi, on a :

$$3,06 < \alpha < 3,061.$$

Finalement, la production d'un coût marginal de 11 292 € est de 3 060 kg. ***/1 point***

(c) On a :

$$\begin{aligned}\frac{C(3,06)}{3,06} &= \frac{10 \times 3,06 + (3,06 - 4)\, e^{3,06} + 24}{3,06} \\ &\approx \frac{34,552}{3,06} \\ &\approx 11,292.\end{aligned}$$

Finalement, le coût moyen de fabrication est alors de 11 292 €. ***/0,5 point***

Exercice 2 : *(11 points)*

— Partie A —

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned}\frac{3}{1+2e^{-0,25\,x}} &= \frac{e^{0,25\,x}}{e^{0,25\,x}} \times \frac{3}{1+2\,e^{-0,25\,x}}\\ &= \frac{3\,e^{0,25\,x}}{e^{0,25\,x}+2\,e^{-0,25\,x}\,e^{0,25\,x}}\\ &= \frac{3\,e^{0,25x}}{2+e^{0,25\,x}}\\ &= f(x).\end{aligned}$$

/1 point

2. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -0,25\,x = -\infty$ et $\lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$, alors, par composition, on a :
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-0,25\,x} = 0.$$
Ainsi, par somme et quotient, on a :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1+2e^{-0,25x}} = 3.$$
/0,75 point
Ainsi, la courbe représentative de la fonction f admet donc une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 3$. */0,25 point*
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -0,25\,x = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} e^y = +\infty$, alors, par composition, on a :
$$\lim_{x\to-\infty} e^{-0,25\,x} = +\infty.$$
Ainsi, par somme et quotient, on a :
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{1+2e^{-0,25x}} = 0.$$
/0,75 point
Ainsi, la courbe représentative de la fonction f admet donc une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 0$. */0,25 point*

3. La fonction $x \longmapsto e^{-0,25\,x}$, composée des fonctions dérivables : la fonction exponentielle et $x \mapsto -0,25x$, qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned}f'(x) &= 3 \times (-1) \times 2 \times \frac{-0,25e^{-0,25\,x}}{(1+2e^{-0,25\,x})^2}\\ &= \frac{3}{2} \times \frac{e^{-0,25\,x}}{(1+2e^{-0,25\,x})^2}.\end{aligned}$$
/1 point
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$e^{-0,25x} > 0 \qquad \text{et} \qquad \left(1+2e^{-0,25\,x}\right)^2 > 0.$$
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) > 0$ et, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. */0,5 point*

— **Partie B** —

1.(a) Les solutions de l'équation différentielle (E$_1$) : $y' = \dfrac{y}{4}$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = k\, e^{0{,}25\, t},$$

avec k constante réelle. */0,5 point*

(b) Comme g est une solution de l'équation différentielle (E$_1$), alors $g(t) = ke^{0{,}25\, t}$.
Or $g(0) = 1$, et on a :

$$\begin{aligned} g(0) = 1 &\iff k\, e^{0{,}25\times 0} = 1 \\ &\iff k = 1. \end{aligned}$$

/0,5 point

(c) La population dépassera 300 rongeurs pour la première fois lorsque $g(t) \geqslant 3$. */0,5 point*

2.(a) Soit u une fonction strictement positive vérifiant la condition (E$_2$), on a :

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u(t)^2}{12}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Soit h une fonction définie et dérivable sur $[0; +\infty[$, vérifiant $h(t) = \dfrac{1}{u(t)}$. Alors :

$$\begin{aligned} h(0) &= \frac{1}{u(0)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $u(0) = 1$ si et seulement si $h(0) = 1$.
De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$h'(t) = -\frac{u'(t)}{u^2(t)}.$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12}.$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $u(t) > 0$, donc, en divisant par $-u^2(t)$ l'égalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12} &\iff -\frac{u'(t)}{u^2(t)} = -\frac{u(t)}{4u^2(t)} - \frac{u(t)^2}{12u^2(t)} \\ &\iff -\frac{u'(t)}{u^2(t)} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{u(t)} - \frac{1}{12} \\ &\iff h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u(t)^2}{12}$ si et seulement si $h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12}$.
Ainsi, la fonction h satisfait aux conditions suivantes :

$$(\mathrm{E}_3) \begin{cases} h'(t) &= -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+ \\ h(0) &= 1. \end{cases}$$

Finalement, u satisfait aux conditions (E$_2$) $\iff$ h satisfait aux conditions (E_3). */2 points*

2.(b) Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{aligned} f_k(t) &= k\,e^{-0{,}25\,t} - \frac{\frac{1}{12}}{-\frac{1}{4}} \\ &= k\,e^{-0{,}25\,t} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned} h(t) &= f_k(t) \\ &= k\,e^{-0{,}25\,t} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Or $h(0) = 1$, donc, on a :

$$\begin{aligned} h(0) = 1 &\iff f_k(0) = 1 \\ &\iff k\,e^{-0{,}25\times 0} + \frac{1}{3} = 1 \\ &\iff k = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $h(t) = \frac{2}{3}\,e^{-0{,}25\,t} + \frac{1}{3}$. ***/1,5 point***

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $u(t) = \frac{1}{h(t)}$, donc on a :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{h(t)} \\ &= \frac{1}{\frac{2}{3}\,e^{-0{,}25\,t} + \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{3}\left(2\,e^{-0{,}25\,t} + 1\right)} \\ &= \frac{3}{2\,e^{-0{,}25\,t} + 1}. \end{aligned}$$

/0,5 point

(c) Dans cette question, on cherche à déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)$.
D'après la question 2 de la Partie 1, on en déduit que :

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 3.$$

Finalement, dans ce modèle, la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$ s'approche de 3. ***/1 point***