Chapitre 12
Fonctions trigonométriques

Sommaire

I. Repérage sur le cercle trigonométrique

1. Enroulement de la droite des réels

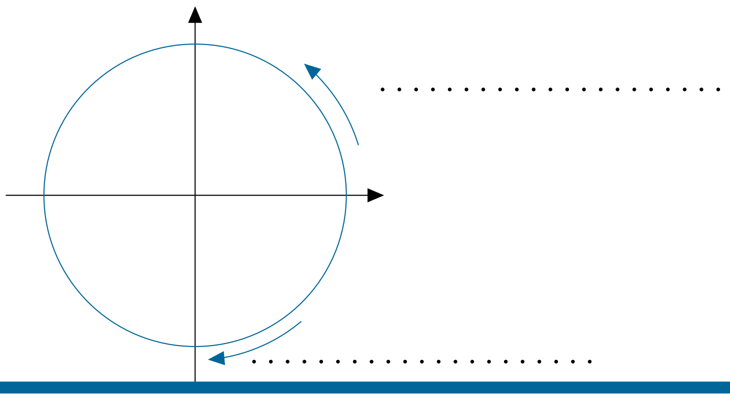
Définition 12.1 : Sens direct et sens indirect

Le sens trigonométrique positif ou sens direct est . . . .

. . . .

Le sens trigonométrique négatif ou sens indirect est . . . .

. . . .



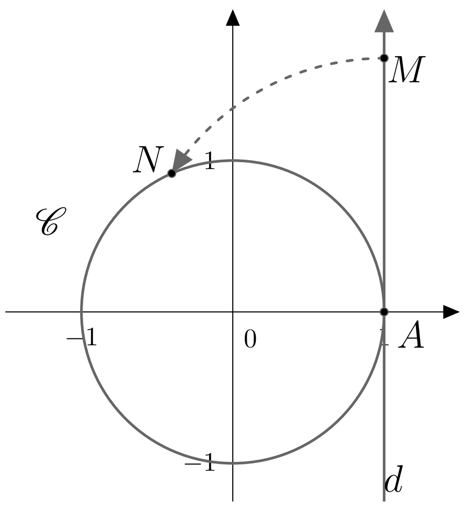
Remarque 12.2 :

On considère un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ orthonormé dans le lequel on trace le cercle $\mathscr{C}$ de centre 0 et de rayon 1.

On représente l'axe des réels par une droite d verticale d'équation $x = 1$ dont l'origine 0 est le point de coordonnées $(1; 0)$ et orienté vers le haut.

A tout réel x représenté par un point M sur la droite des réels d, on fait correspondre un point N sur le cercle trigonométrique lorsqu'on enroule cette droite sur le cercle $\mathscr{C}$.

On obtient alors le graphique suivant :



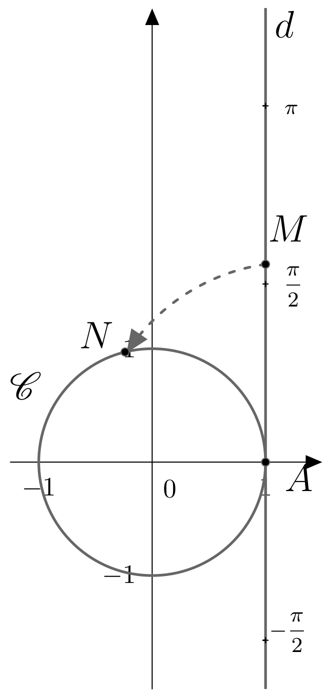
Les réels positifs de d sont enroulés dans le sens direct alors que les réels négatifs sont enroulés dans le sens indirect.

Le cercle $\mathscr{C}$ ayant pour rayon 1, son périmètre est de 2π.

Donc, si on souhaite représenter le réel 2π sur le cercle $\mathscr{C}$, il correspond au point A, tout comme le réel 0 : on voit alors qu'un point sur le cercle $\mathscr{C}$ peut être associé à plusieurs réels de la droite d.

C'est pourquoi généralement, on prendra comme graduation sur cet axe π (périmètre du demi-cercle).

On obtient alors le graphique ci-contre :



Par exemple, le réel $\dfrac{\pi}{2}$ est associé au point du cercle $\mathscr{C}$ ayant pour coordonnées $(0; 1)$, tout comme $\dfrac{5\pi}{2} = 2\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

De même, $-\dfrac{\pi}{2}$ est associé au point du cercle ayant pour coordonnées $(0; -1)$.

Définition 12.3 : ***Cercle trigonométrique***

. . . .

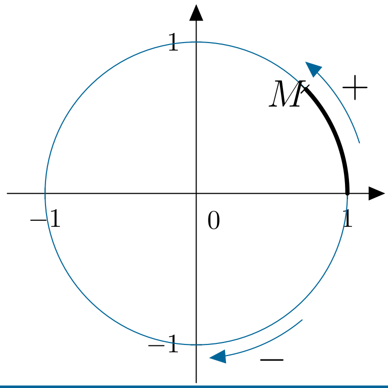
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .



Propriété 12.4 : ***Unicité du point associé à un réel***

A tout nombre réel x est associé un point M du cercle trigonométrique et un seul.

Propriété 12.5 : ***Multiplicité des réels associés à u point du cercle***

A chaque point M du cercle trigonométrique est associé une infinité de nombres réels.

Deux réels x et x' sont associés à un même point M du cercle trigonométrique si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x' = x + 2k\pi$.

Exemple 12.6 :

- Les nombres $\dfrac{47\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$ ne sont pas représentés par le même point M sur le cercle trigonométrique.

  . . . .

  . . . .

  . . . .

  . . . .

  . . . .

  . . . .

  . . . .

- Les nombres $\dfrac{13\pi}{4}$ et $-\dfrac{27\pi}{4}$ sont représentés par le même point M sur le cercle trigonométrique.

  . . . .

  . . . .

  . . . .

  . . . .

  . . . .

  . . . .

  . . . .

Définition 12.7 : Mesure principale d'un angle

Parmi tous les réels x associés à un point M du cercle trigonométrique, il existe un unique réel α compris entre $]-\pi;\pi]$. Ce réel α est appelé mesure principale de x.

Méthode 12.8 : Mesure principale d'un angle

Pour déterminer la mesure principale α d'un réel x, on procède de la manière suivante :

1. On écrit $\alpha = x + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. En encadrant α, on détermine la valeur de k.
2. Une fois k déterminé, on remplace sa valeur et on calcule α.

Exemple 12.9 :

Déterminer la mesure principale de $x = -\dfrac{137\pi}{3}$.

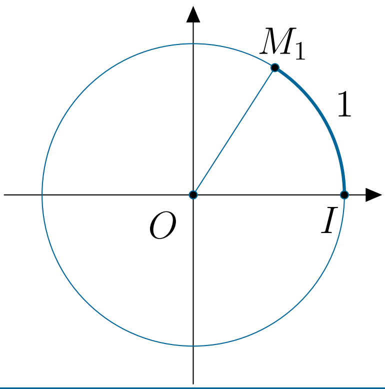
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Le radian

Définition 12.10 : — Radian

Un radian correspond à la mesure de l'angle qui intercepte un arc de cercle de longueur 1 sur le cercle trigonométrique.

Sur le cercle trigonométrique, on note M_1, le point associé au nombre réel 1 et on a la figure ci-dessous :



Remarque 12.11 :

Le symbole du radian est l'abréviation : rad.

Par convention, si l'unité d'une mesure d'angle n'est pas exprimée, c'est que cette mesure d'angle est exprimée en radian.

De plus, le périmètre du cercle trigonométrique est 2π (car de rayon 1), ainsi, on obtient : $360° = 2\pi$ rad.

Exemple 12.12 :

Par simple simple observation du cercle trigonométrique, un angle plat (de ....degrés) mesure . ...rad, alors qu'un angle droit (donc de ....degrés) mesure ....rad.

Propriété 12.13 : — Proportionnalité entre degrés et radians

Les mesures des angles en degré et en radian sont proportionnelles.

Remarque 12.14 :

On peut alors donner une correspondance, en degré, de 1 rad.

On a le tableau suivant :

Radian	π	1
Degré	180	x

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} x &= \frac{180 \times 1}{\pi} \\ &\approx 57,3. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient la correspondance :

$$1 \text{ rad} \approx 57,3°.$$

Exemple 12.15 :

1. Déterminer la mesure (en radian) d'un angle mesurant 30°.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Déterminer la mesure (en degré) d'un angle mesurant $\frac{2\pi}{3}$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Remarque 12.16 :

Les correspondances en degré et radians données dans le tableau ci-dessous sont à connaitre :

Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Degré	0	30	45	60	90	180	360

II. Trigonométrie

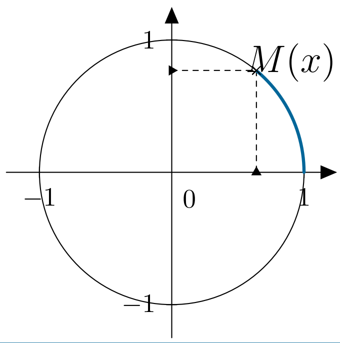
1. Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition 12.17 : Cosinus et sinus d'un réel

Dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère x un nombre réel et M son image sur le cercle trigonométrique.

Le cosinus de x ....
....
....

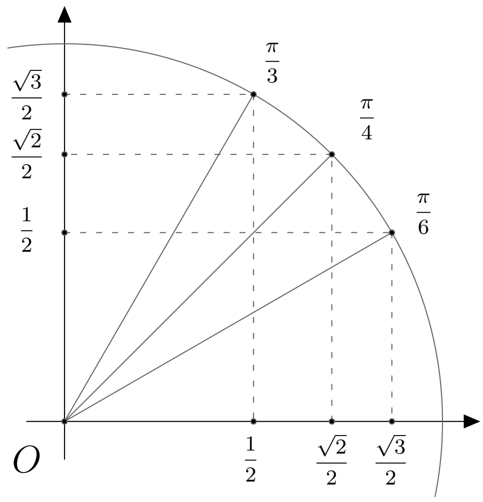
Le sinus de x ....
....
....



Remarque 12.18 :

Dans le tableau ci-dessous, on donne des valeurs remarquables à connaitre pour le cosinus et le sinus d'un nombre réel :

$x =$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x =$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



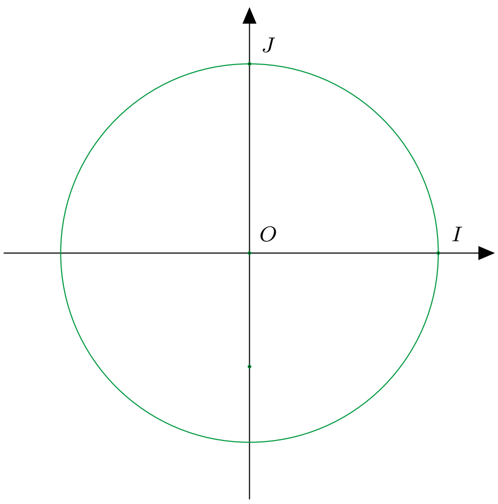
Propriété 12.19 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a ....

Exemple 12.20 :

On considère le cercle trigonométrique de centre O et soit $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin x = -0,6$.

Calculer $\cos x$ et visualiser le problème à l'aide du cercle trigonométrique ci-dessous :



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Propriété 12.21 : ***Encadrement du sinus et cosinus***

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a ....

Propriété 12.22 : Périodicité du cosinus et sinus

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a . . . .

2. Les angles associés

Remarque 12.23 :

A un angle donné x, il existe quatre angles associés : l'angle opposé $-x$, l'angle supplémentaire $\pi - x$, l'angle anti-supplémentaire $\pi + x$ et l'angle complémentaire $\frac{\pi}{2} - x$

Propriété 12.24 : Cosinus et sinus des angles opposés

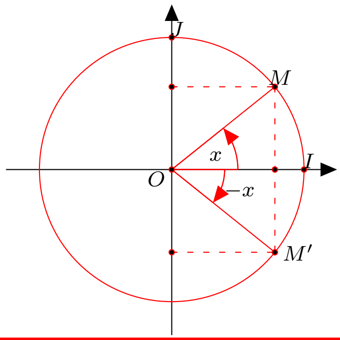
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .



Propriété 12.25 : Cosinus et sinus des angles supplémentaires

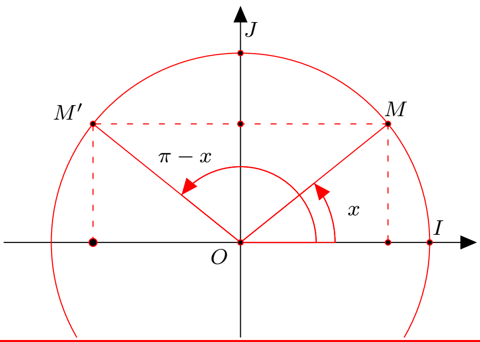
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .



Remarque 12.26 :

Grâce à ces symétries, il est toujours possible se ramener à l'étude du cosinus et du sinus sur le premier quart de cercle, c'est-à-dire lorsque $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Propriété 12.27 : Passer d'un sinus à un cosinus et inversement

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

. . . .

. . . .

. . . .

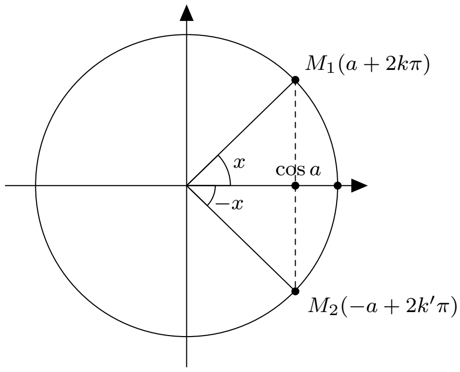
3. Résolution d'équations trigonométriques

Théorème 12.28 :

On considère $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ (a fixé).

Alors :

$$\cos x = \cos a \iff \begin{cases} x = a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k'\pi, \quad k' \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$



Méthode 12.29 : Résoudre une équation trigonométrique

Pour résoudre une équation trigonométrique du type $\cos x = c$, on procède de la manière suivante :

1. si $c \notin [-1;1]$, l'équation $\cos x = c$ n'admet pas de solution car on a, d'après l'une des propriétés précédentes, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$;
2. si $c \in [-1;1]$, l'équation $\cos x = c$ admet une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$:
   (a) on cherche une valeur particulière de a telle que $\cos a = c$ (on pourra notamment utiliser les valeurs remarquables précédemment données) ;
   (b) on conclut en donnant toutes les solutions de l'équation trigonométrique :

$$x = a + 2k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad x = -a + 2k'\pi,\ (k' \in \mathbb{Z}).$$

Exemple 12.30 :

Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation trigonométrique $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On a $-1 \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq 1$ donc l'équation trigonométrique admet des solutions dans $\mathbb{R}$.

De plus, on sait que $\cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, on a :

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos x = \cos \frac{\pi}{6}.$$

Ainsi, sur $\mathbb{R}$, les solutions de cette équation sont :

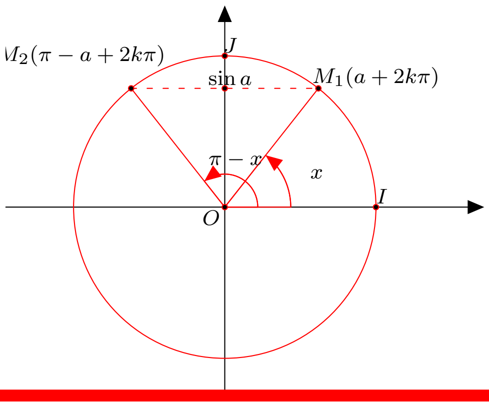
$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k'\pi,\ (k' \in \mathbb{Z}).$$

Propriété 12.31 :

On considère $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ (a fixé).

Alors :

$$\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x = a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k'\pi, \quad k' \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$



Remarque 12.32 :

La résolution des équations trigonométriques avec les sinus s'effectue de la même manière que celles avec les cosinus.

III. Les fonctions trigonométriques

1. Etude de la fonction sinus

Etude sur $[0;\pi]$

Propriété 12.33 :

La fonction sinus est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et elle est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

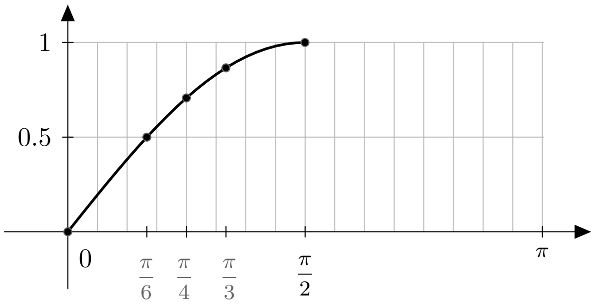
On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Var sin	0	↗	1	↘	0

Remarque 12.34 :

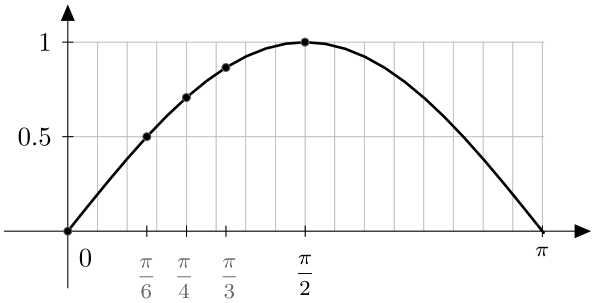
Dans un premier temps, pour construire la courbe représentative de la fonction sinus sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on va utiliser les valeurs remarquables du sinus vues en remarque 12 de ce chapitre.

On place alors les points de coordonnées $(x;\sin x)$ sur le graphique ci-dessous et on obtient la courbe représentative de la fonction sinus sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:



Pour construire la courbe représentative de la fonction sinus sur $[0;\pi]$, il reste à représenter le symétrique de la partie de la courbe tracée ci-dessus par rapport à la droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$.

Ainsi, la courbe représentative de la fonction sinus est la suivante :



Etude sur $[-\pi;\pi]$

Propriété 12.35 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

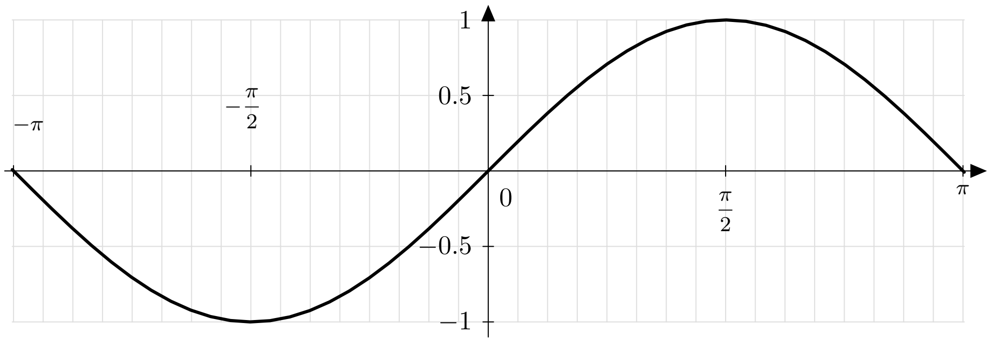
La fonction sinus est donc une fonction impaire car elle vérifie la propriété suivante :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x).$$

Remarque 12.36 :

On trace le symétrique de la courbe représentative de la fonction sinus sur $[0;\pi]$ par rapport à l'origine du repère. Ce symétrique correspond à la courbe représentative de la fonction sinus sur $[-\pi;0]$. On obtient la courbe représentative de la fonction sinus sur $[-\pi;\pi]$.

Sur $[-\pi;\pi]$, la courbe représentative de la fonction sinus est la suivante :



Etude sur $\mathbb{R}$

Propriété 12.37 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

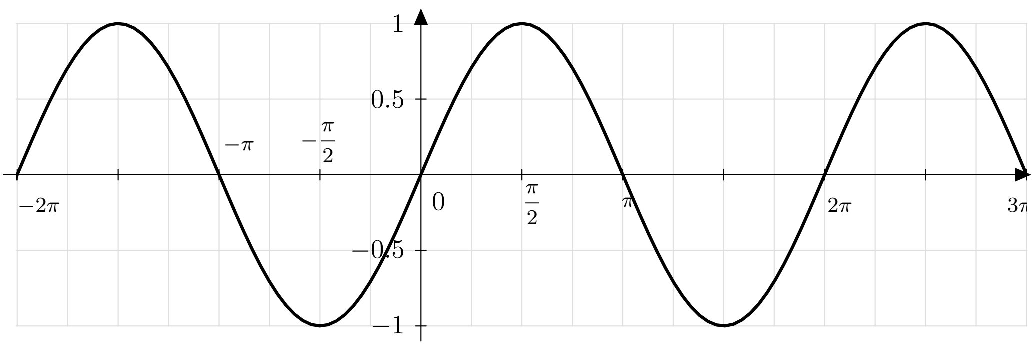
$$\sin(x+2k\pi) = \sin x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La fonction sinus est dite *2π-périodique* ou *périodique de période 2π*.

Remarque 12.38 :

On reproduit la courbe représentative de la fonction sinus sur $[-\pi;\pi]$ après translation de vecteur $2k\pi\,\overrightarrow{i}$ (avec $k \in \mathbb{Z}$). On obtient alors la courbe représentative de la fonction sinus sur $\mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{R}$, la courbe représentative de la fonction sinus est la suivante :



2. Etude de la fonction cosinus

Etude sur $[0;\pi]$

Propriété 12.39 :

La fonction cosinus est décroissante sur $[0;\pi]$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		π
Var cos	1	$\searrow$	-1

Démonstration 12.40 :

Cette démonstration n'est pas un attendu du programme et utilise le résultat suivant :

La fonction $\cos$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a :*

$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

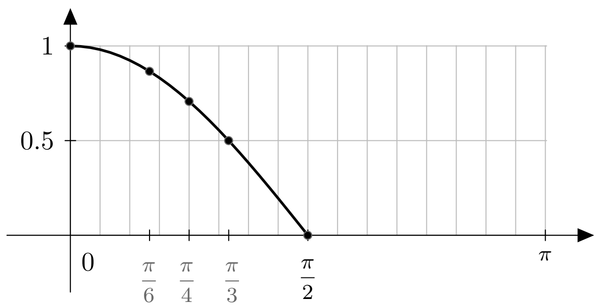
Etudions le signe de la fonction sinus sur l'intervalle $[0;\pi]$ pour en déduire les variations de la fonction cos.

On obtient alors le tableau suivant :

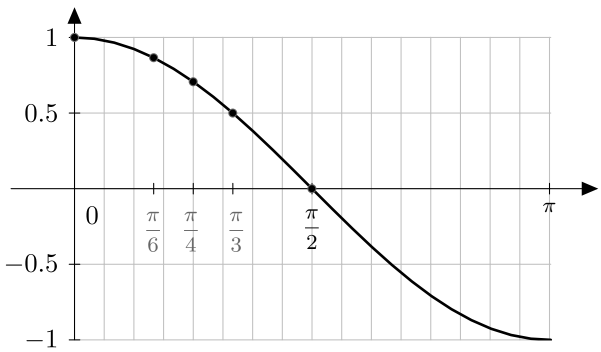
x	0		π
Signe $-\sin(x)$	0	$-$	0
Var cos	1	$\searrow$	-1

Remarque 12.41 :

Dans un premier temps, pour construire la courbe représentative de la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on va utiliser les valeurs remarquables du cosinus vues en remarque 12 de ce chapitre.
On place alors les points de coordonnées $(x; \cos x)$ sur le graphique ci-dessous et on obtient la courbe représentative de la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:



A partir des valeurs remarquables du cosinus, on peut placer les points de coordonnées $(\pi - x; cos(\pi - x))$ puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = -\cos(\pi - x)$. On obtient alors la courbe représentative de la fonction cosinus sur $[0; \pi]$:



Etude sur $[-\pi; \pi]$

Propriété 12.42 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(-x) = \cos x.$$

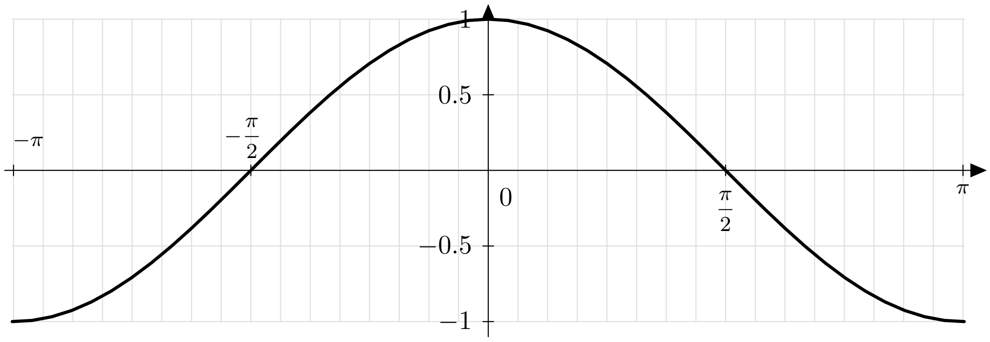
La fonction cosinus est donc une fonction *paire*. Elle vérifie la propriété suivante :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = f(x)$.

Remarque 12.43 :

On trace le symétrique de la courbe représentative de la fonction cosinus sur $[0; \pi]$ par rapport à l'axe des ordonnées : on obtient alors la courbe représentative de la fonction cosinus sur $[-\pi; 0]$.

Sur $[-\pi; \pi]$, la courbe représentative de la fonction cosinus est la suivante :



Etude sur $\mathbb{R}$

Propriété 12.44 :

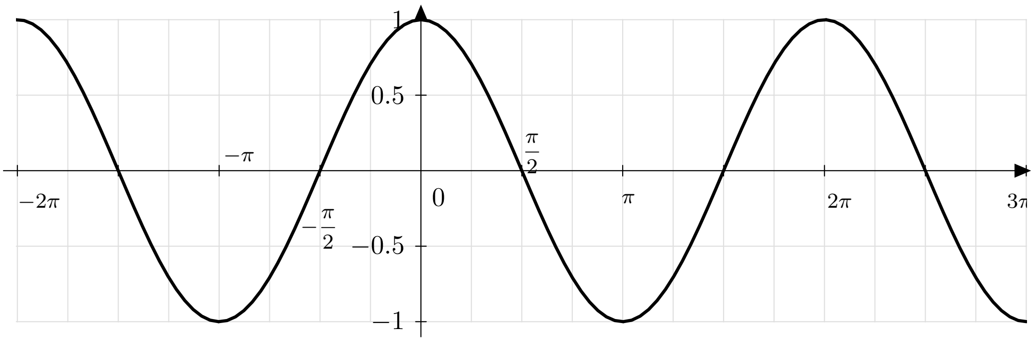
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La fonction cosinus est 2π-périodique.

Remarque 12.45 :

Sur $\mathbb{R}$, la courbe représentative de la fonction cosinus est la suivante :



Remarque 12.46 :

Avec les courbes représentatives des fonctions cos et sin construites précédemment, on retrouve les résultats obtenus avec le cercle trigonométrique concernant la résolution des équations trigonométriques :

- lorsque $c \notin [-1; 1]$, les équations $c = \cos x$ et $c = \sin x$ n'admettent pas de solutions (les courbes étant comprises entre -1 et 1 en ordonnées) : il n'y a aucun point d'intersection entre les courbe représentative de la fonction cos ou de la fonction sin et la droite d'équation $y = c$;
- lorsque $c \in [-1; 1]$, les équations $c = \cos x$ et $c = \sin x$ admettent une infinité de solutions : car il y a une infinité de points d'intersection entre de la fonction cos ou de la fonction sin et la droite d'équation $y = c$.