Chapitre 11
Suites de référence

Sommaire

Capacités :	**Bilan :**				
Justifier qu'une suite est arithmétique ou non					
Déterminer le terme général d'une suite arithmétique					
Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique					
Calculer une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique					
Justifier qu'une suite est géométrique ou non					
Déterminer le terme général d'une suite géométrique					
Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique					
Calculer une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique					

I. Les suites arithmétiques

Définition 11.1 : Suite arithmétique

On considère une partie infinie de $\mathbb{N}$, notée I.

....

....

....

....

....

....

Méthode 11.2 : Démontrer qu'une suite est arithmétique ou non

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique on procède de la manière suivante :

1. ....
2. ....
3. - ....
   ....
   - ....
   ....

Exemple 11.3 :

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = 3n - 2$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

....

....

....

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Savoir-Faire 1 p. 51 « Reconnaitre une suite arithmétique ».

Complément(s) :

Vidéo « Reconnaitre une suite arithmétique »

Complément(s) :

Vidéo « Démontrer qu'une suite est arithmétique »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 9 et 10 p. 51

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 1 : Les trois suites suivantes peuvent-elles être des suites arithmétiques ?

1. (x_n) définie par $x_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n + 2}$.
2. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2+1$.
3. (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 2n-1$.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 2 : Démontrer que les suites suivantes sont des suites arithmétiques dont on précisera la raison et le premier terme.

1. (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 5n - 1$.
2. (y_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $y_n = -3n + 5$.

Propriété 11.4 : Sens de variation d'une suite arithmétique

Le sens de variation d'une suite arithmétique de raison r est donné par le signe de la raison :

- ....
- ....
- ....

Démonstration 11.5 :

On considère une suite (u_n) arithmétique de raison r.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r.$$

On distingue alors 3 cas :

- Si $r > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n > 0$ donc $u_{n+1} > u_n$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $r = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 0$ donc $u_{n+1} = u_n$ et la suite (u_n) est constante (stationnaire).
- Si $r < 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n < 0$ donc $u_{n+1} < u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.

Complément(s) :

Savoir-Faire 2 p. 52 « Déterminer les variations d'une suite arithmétique ».

Complément(s) :

Vidéo « Etudier le sens de variation d'une suite arithmétique »

✎ Exercice(s) :

Exercice 3 : Etudier le sens de variation des suites suivantes :

1. (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 5n - 1$.
2. (x_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_{n+1} = x_n - 5$.

Théorème 11.6 : Terme général d'une suite arithmétique

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Si (u_n) est arithmétique de raison r alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : ....
- Inversement, ...

  ....

  ....

  ....

Exemple 11.7 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de raison $r = 500$ avec $u_0 = 10\,000$. Calculer u_{25}.

....

....

....

....

....

....

Propriété 11.8 :

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ arithmétique de raison r.

Pour tous entiers n et p tels que $n \geqslant n_0$ et $p \geqslant n_0$, on a : ....

Exercice(s) :

Exercice 4 : Déterminer le terme général des suites suivantes et donner le 25ème terme.

1. (u_n) arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $u_0 = 4$.
2. (x_n) arithmétique de raison $r = 1,25$ et de premier terme $x_6 = -3$.
3. (y_n) arithmétique de raison $r = -\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $y_1 = 10$.

Propriété 11.9 :

Les points représentant une suite arithmétique sont alignés.

Théorème 11.10 : ***Somme des premiers entiers***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Démonstration 11.11 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$.

On écrit S_n de deux manières différentes :

....

....

En sommant ces deux égalités, il vient que : ....

Ainsi, on a ....

Exemple 11.12 :

Calculer $\sum_{k=1}^{23} k$.

....

....

....

....

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 99 et 100 p. 64.

Théorème 11.13 Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

On considère une suite (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 11.14 :

On considère la suite (w_n) définie par $w_n = n + 2$. Calculer $\sum_{k=0}^{10} w_k$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Propriété 11.15 :

On considère une suite (u_n) arithmétique de raison r.

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$, on a :

$$\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque 11.16 :

De la dernière proposition, il faut alors retenir que :

$$\sum_{i=p}^{n} u_i = (\text{Nombre de termes}) \times \frac{1^{\text{er}}\text{ terme } + \text{ Dernier terme}}{2}.$$

Complément(s) :

Savoir-Faire 5 p. « Calculer une somme de termes » question 1.

Complément(s) :

Vidéo « Calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 101 à 104 p. 64

II. Les suites géométriques

Définition 11.17 : — Suite géométrique

On considère une partie infinie de $\mathbb{N}$.

....

....

....

....

....

....

Méthode 11.18 : — Démontrer qu'une suite est géométrique ou non

Pour démontrer qu'une suite est géométrique on procède de la manière suivante :

1. ....
2. ....
3. • ....
   ....
   • ....
   ....

Exemple 11.19 :

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = 7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Savoir-Faire 3 p. 53 « Reconnaitre une suite géométrique »

Complément(s) :

Vidéo « Reconnaitre une suite arithmétique ou géométrique »

Exercice(s) :

Exercice 5 : Les trois suites suivantes peuvent-elles être des suites géométriques ?

1. (x_n) définie par $x_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $x_{n+1} = (x_n + 2)^2$.
2. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 1$.
3. (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \frac{2}{3^n}$.

Exercice(s) :

Exercice 6 : Démontrer que les suites suivantes sont des suites géométriques dont on précisera la raison et le premier terme.

1. (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \frac{2}{3^n}$.
2. (y_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $y_n = -3 \times 5^{n+2}$.

Théorème 11.20 : Terme général d'une suite géométrique

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Si (u_n) est géométrique de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : ....
- Inversement, ...

  ....

  ....

Exemple 11.21 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison $q = 1,035$ avec $u_0 = 10\,000$. Calculer u_{25}.

....

....

....

....

Propriété 11.22 :

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ géométrique de raison q. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant n_0$ et $p \leqslant n$, on a : ....

Complément(s) :

Lire la vidéo « Déterminer l'expression générale d'une suite géométrique ».

Complément(s) :

Vidéo « Déterminer l'expression générale d'une suite géométrique »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 7 : Déterminer le terme général des suites suivantes et donner le 10ème terme.

1. (u_n) géométrique de raison $q = -0,2$ et de premier terme $u_0 = 40$.
2. (x_n) géométrique de raison $q = 1,25$ et de premier terme $x_6 = -3$.
3. (y_n) géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ et de premier terme $y_1 = 10$.

Propriété 11.23 : Sens de variation des suites géométriques

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison q et soit u_0 son premier terme.

Le sens de variations de la suite (u_n) dépend de la raison géométrique q ainsi que de son premier terme u_0.

1. Si $q > 1$ alors on distingue deux sous cas :
   (a) Si $u_0 > 0$, la suite (u_n) est alors croissante.
   (b) Si $u_0 < 0$, la suite (u_n) est alors décroissante.
2. Si $q = 1$, la suite est alors constante.
3. Si $0 < q < 1$ alors on distingue deux sous cas :
   (a) Si $u_0 < 0$, la suite (u_n) est alors croissante.
   (b) Si $u_0 > 0$, la suite (u_n) est alors décroissante.
4. Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

Complément(s) :

Savoir-Faire 4 p. 54 « Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique »

Complément(s) :

Vidéo « Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique »

✎ Exercice(s) :

Exercice 84 p. 62

Propriété 11.24 : Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison q.

- Si $q \neq 1$, alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- Si $q = 1$, alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

De manière plus générale, pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leqslant n$, on a :

- Si $q \neq 1$, alors : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + \cdots + u_n \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- Si $q = 1$, alors : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple 11.25 :

Calculer $\sum_{i=0}^{8} 2^i$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Complément(s) :

Savoir-Faire 5 (question 2) p. 55 « Calculer une somme de termes ».

Complément(s) :

Vidéo « Calculer une somme de termes d'une suite géométrique »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 105 et 106 p. 64