Exercice 1 : (/10 points)

Cet exercice est un **VRAI/FAUX avec justifications**.
Pour chacune des 5 questions suivantes, vous direz si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^x - 1)^2$ est égal à :

1. <u>Affirmation 1 :</u>

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(e^x - 1)^2 = e^{2x} - 1$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

   $$(e^x - 1)^2 = (e^x)^2 - 2e^x + 1 = e^{2x} - 2e^x + 1 \neq e^{2x} - 1$$

   L'affirmation e *$/2$ points*

2. <u>Affirmation 2 :</u>

   La dérivée de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} \times e^{3x-1}$ est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f'(x) = \dfrac{e^{3x-1}(6x+1)}{2\sqrt{x}}$.

   Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

   $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{3x-1} + 3\sqrt{x} e^{3x-1} = \frac{e^{3x-1}(6x+1)}{2\sqrt{x}}$$

   L'affirmation e *$/2$ points*

3. <u>Affirmation 3 :</u>

   $e^x + 2e^{1-x} = 0$ admet une unique solution.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$ et $e^{1-x} > 0$.

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x + 2e^{1-x} > 0$.

   L'affirmation e *$/2$ points*

4. <u>Affirmation 4 :</u>

   On a $-2 < e^{x^2-1} < 1 \iff x^2 < 1$.

   On a :

   $$-2 < e^{x^2-1} < 1 \iff e^{x^2-1} < e^0 \iff x^2 - 1 < 0 \iff x^2 < 1.$$

   L'affirmation e *$/2$ points*

5. <u>Affirmation 5 :</u>

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{e^{x^2-1}}{e^{x+1}} = e^{x-1}$.

   On a :

   $$\frac{e^{x^2-1}}{e^{x+1}} = e^{x^2-1-(x+1)} = e^{x^2-x-2} \neq e^{x-1}$$

   En prenant $x = 1$, on a : $e^{-2} = 1$: ce qui e

   L'affirmation e *$/2$ points*

Exercice 2 : *(10 points)*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère du plan.

1. Déterminer les coordonnées du point A, point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.
   On a $A(0; f(0))$ et $f(0) = \dfrac{e^0}{1+0} = 1$.
   Finalement, le point A a pour coordonnée $A(0;1)$. */1,5 point*
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.
   On cherche ici le $\mathscr{C}_f$ de coordonnée $(x;0)$.
   On ré $f(x) = 0$:
   $$f(x) = 0 \iff \frac{e^x}{1+x} = 0 \iff e^x = 0$$
   Finalement, l'équation $e^x = 0$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas l'axe de */1,5 point*
3. On note f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
   Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a :
   $$f'(x) = \frac{x\,e^x}{(1+x)^2}.$$
   La fonction f e $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1+x$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$.
   Donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a :
   $$f'(x) = \frac{(1+x)e^x - e^x}{(1+x)^2} = \frac{x\,e^x}{(1+x)^2}.$$
   /2 points
4. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

   En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a :
   $$(1+x)^2 > 0 \qquad e^x > 0$$
   Le signe de $f'(x)$ ne dé x. */1,5 point*

On a :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
Var f	$\searrow$		||	$\searrow$	1	$\nearrow$	

/1,5 point

5. On note $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $1,6$.

   La tangente $\mathcal{T}$ passe-t-elle par l'origine du repère ? Justifier la réponse.

   On a $\mathcal{T} : y = f'(1,6)(x - 1,6) + f(1,6)$.

   Or $f(1,6) = \dfrac{e^{1,6}}{2,6}$ et $f'(1,6) = \dfrac{1,6\, e^{1,6}}{2,6^2}$.

   Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} y = f'(1,6)(x-1,6) + f(1,6) &\iff y = \frac{1,6\, e^{1,6}}{2,6^2}\, x - \frac{1,6\, e^{1,6^2}}{2,6^2} + \frac{e^{1,6}}{2,6} \\ &\iff y = \frac{1,6\, e^{1,6}}{2,6^2}\, x + \frac{e^{1,6}}{2,6^2} \end{aligned}$$

   L'ordonnée à l'origine de $\mathcal{T}$ n'étant pas nul, elle ne passe pas par l'origine du re

/2 points

(D'après la Banque Nationale des Sujets)

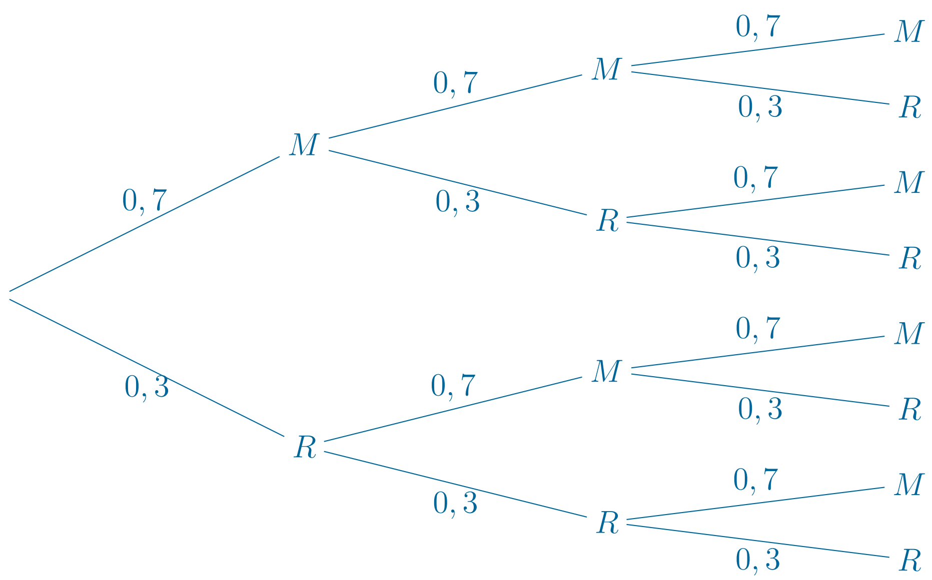
Exercice 3 : *(10 points)*

Une étude statistique menée lors des entrainements montre que, pour un tir au but, Karim marque avec une probabilité de $0,7$.
Karim effectue une série de trois tirs au but. Les deux issues possibles après chaque tir au but sont les événements :

- M : « Karim marque un but » ;
- R : « Karim rate le tir au but ».

On admet que les tirs au but de Karim sont indépendants.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de buts marqués à l'issue de cette série de tirs au but par Karim.

1. Réaliser un arbre pondéré permettant de décrire toutes les issues possibles.



/2 points

2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

On a :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$0,027$	$0,189$	$0,441$	$0,343$

/2 points

3. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X puis interpréter le résultat.

On a :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times 0,027 + \ldots + 3 \times 0,343 = 2,1$$

En moyenne, Karim va marquer 2,1 fois sur la série de 3 tirs au but.

/2 points

4. Calculer la variance $\mathbb{V}(X)$ puis l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.

On a :

$$\mathbb{V}(X) = 0 \times (0,027 - 2,1)^2 + \ldots + 3 \times (0,343 - 2,1)^2 = 0,63$$

Ainsi, on obtient :

$$\sigma(X) = \sqrt{0,63} \approx 0,80$$

/2 points

5. On souhaite simuler la variable aléatoire X.
Pour se faire, on procèdera en deux temps : une simulation d'un tir au but (avec la fonction `TirAuBut`) qui renvoie 1 en cas de but et 0 sinon, puis, on répètera cette simulation trois fois (avec la fonction `TroisTirsAuBut`).
Compléter le programme ci-dessous pour qu'il réponde au problème posé :

```
from random import
def TirAuBut() :
     tir=random.random()
     if ...tir<0.7... :
         return(...1...)
     else :
         return(...0...)

def TroisTirsAuBut() :
     X=0
     for k in range(...3...) :
         X= ...X+TirAuBut()...
     return(...X...)
```

/2 points

Exercice 4 : ***(10 points)***

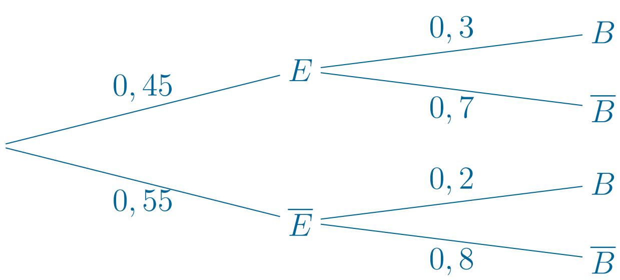
Dans cet exercice, toutes les probabilités seront données sous forme décimale, arrondie au millième.

Une entreprise récupère des smartphones endommagés, les répare et les reconditionne afin de les revendre à prix réduit.

- 45 % des smartphones qu'elle récupère ont un écran cassé ;
- parmi les smartphones ayant un écran cassé, 30 % ont également une batterie défectueuse ;
- par contre, seulement 20 % des smartphones ayant un écran non cassé ont une batterie défectueuse.

1. Un technicien chargé de réparer et reconditionner les smartphones de l'entreprise prend un smartphone au hasard dans le stock. On note :
   - E l'événement : « Le smartphone choisi a un écran cassé »
   - B l'événement : « Le smartphone choisi a une batterie défectueuse »

   (a) Représenter la situation décrite ci-dessus par un arbre pondéré.



/2 points

   (b) Démontrer que la probabilité que le smartphone choisi ait une batterie défectueuse est égale à 0,245.

   On cherche $P(B)$.
   Comme E et $\overline{E}$ forment un sy
   formule de

$$P(B) = P(E \cap B) + P(\overline{E} \cap B) = 0,45 \times 0,3 + 0,55 \times 0,2 = 0,245$$

/2 points

   (c) Sachant que le smartphone choisi a une batterie défectueuse, quelle est la probabilité qu'il ait un écran cassé ?

   On cherche $P_B(E)$.
   On a :

$$P_B(E) = \frac{P(B \cap E)}{P(B)} = \frac{0,135}{0,245} \approx 0,551$$

/2 points

2. L'entreprise dépense 20 €pour réparer et reconditionner chaque smartphone qu'elle récupère. Si l'écran est cassé, elle dépense 30€supplémentaires, et si la batterie est défecteuuse, elle dépense 40 €supplémentaires.
   On note X la variable aléatoire égale au coût total de réparation et recondionnement d'un smartphone choisi au hasard dans le stock.

(a) Compléter (sans justification attendue) le tableau suivant pour donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X

x_i	20	50	60	90
$P(X = x_i)$	0,44	0,315	0,11	0,135

/2 points

(b) L'entreprise doit réparer et reconditionner 500 smartphones. Combien doit-elle s'attendre à dépenser ?

On a :

$$\mathbb{E}(X) = 20 \times 0,44 + 50 \times 0,315 + 60 \times 0,11 + 90 \times 0,135 = 43,30$$

En moyenne, l'entre 43,30 € pour le
nement d'un télé 500 smart
21 650€.

/2 points